

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ АРМИРОВАННОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ

Эшматов Бахтиёр Хасанович<sup>1,2</sup>, Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович<sup>1</sup>,  
Райимов Абдурахмон Одилжон угли<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации  
и механизации сельского хозяйства»

<sup>2</sup> Ташкентский международный университет образования

\*E-mail: ebkh@mail.ru; theormir@mail.ru; [rayimovabduraxmon@gmail.com](mailto:rayimovabduraxmon@gmail.com)

DOI: 10.61587/mmit.tiue.uz.v1i1.299

**Аннотация.** Работа посвящена математическому моделированию задачи определения областей динамической неустойчивости армированной анизотропной пластины из композиционного материала (стеклопластика) при воздействии поперечной параметрической нагрузки. Построенная на основе уточненной теории Тимошенко и наследственной теории вязкоупругости математическая модель задачи представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных со слабосингулярными ядрами релаксации. Используя метод Бубнова-Галеркина, задача сводится к решению системы обыкновенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Предложена универсальная методика определения областей динамической неустойчивости тонкостенных конструкций при воздействии параметрических нагрузок. Показано влияние физических и геометрических параметров армированной композитной пластины на области динамической неустойчивости.

**Ключевые слова:** параметрические колебания, армированная анизотропная пластина, нелинейность, область динамической неустойчивости.

## MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC INSTABILITY REGIONS OF A REINFORCED COMPOSITE PLATE

Bakhtiyor Khasanovich Eshmatov<sup>1,2</sup>, Mirziyod Mirsaidovich Mirsaidov<sup>1</sup>,  
Abdurakhmon Odiljon ugli Rayimov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization  
Engineers"

<sup>2</sup> Tashkent International University of Education

\*E-mail: ebkh@mail.ru; theormir@mail.ru; [rayimovabduraxmon@gmail.com](mailto:rayimovabduraxmon@gmail.com)

**Abstract.** The paper is devoted to mathematical modeling of dynamic instability regions of a reinforced anisotropic composite plate (fiberglass) subjected to transverse parametric loading. Based on the refined Timoshenko theory and the hereditary theory of viscoelasticity, the mathematical model is formulated as a system of nonlinear integro-differential partial differential equations with weakly singular relaxation kernels. Using the Bubnov-Galerkin method, the problem is reduced to a system of nonlinear ordinary integro-differential equations and solved numerically using quadrature formulas after regularization of the weakly singular kernels. A universal procedure for determining dynamic instability regions of thin-walled structures under parametric loads is proposed, and the influence of physical and geometric parameters of the reinforced composite plate is demonstrated.

**Keywords:** parametric vibrations, reinforced anisotropic plate, nonlinearity, dynamic instability region.

### Введение

Развитие современной техники сопровождается широким использованием тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях переменных

динамических воздействий. К числу таких элементов относятся пластины, панели и оболочки, применяемые в авиационной и космической технике, машиностроении, энергетике и строительстве. В процессе эксплуатации подобные конструкции нередко подвергаются действию периодически изменяющихся нагрузок, способных вызывать параметрические колебания и приводить к потере динамической устойчивости.

Исследование параметрических колебаний представляет значительный научный и практический интерес, поскольку возникновение параметрического резонанса может сопровождаться интенсивным ростом амплитуд колебаний даже при сравнительно небольших внешних воздействиях. В отличие от обычного резонанса, параметрическое возбуждение обусловлено периодическим изменением параметров системы, таких как жесткость, продольная нагрузка или другие характеристики конструкции. Это может приводить к появлению областей динамической неустойчивости, в пределах которых малые возмущения со временем возрастают и способны вызвать нарушение работоспособности конструкции.

Особую актуальность данные исследования приобретают для современных композитных и многослойных конструкций, механическое поведение которых определяется сложным взаимодействием геометрических, физических и эксплуатационных факторов. Анизотропия материала, наличие начальных несовершенств, геометрическая нелинейность и сложные граничные условия оказывают существенное влияние на положение границ областей динамической неустойчивости и характер колебательных процессов.

В связи с этим разработка математических моделей и эффективных методов исследования параметрических колебаний и динамической устойчивости пластин является одной из важных задач современной механики деформируемого твердого тела. Решение данной задачи позволяет оценивать границы устойчивой работы конструкций, прогнозировать возникновение опасных резонансных режимов и повышать надежность инженерных систем.

Основы современной теории динамической устойчивости и параметрических колебаний механических систем были заложены в фундаментальных трудах В.В. Болотина [1,2]. Полученные им результаты стали базой для многочисленных последующих исследований в области динамики и устойчивости деформируемых конструкций.

Большинство последующих исследований, посвящённых проблеме динамической устойчивости, было направлено на определение областей параметров, в пределах которых отдельные моды колебаний утрачивают устойчивость. Характерной чертой таких работ является сведение исходной краевой задачи, как правило за счёт введения упрощающих предположений или использования аппроксимаций, к одному дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, наиболее часто записываемому в форме уравнения Матьё-Хилла. Анализ задач данного класса, как правило, сопровождается введением ряда допущений и ограничений: рассмотрение ведётся преимущественно в линейной постановке, при этом отдельные физико-механические свойства материала - в частности, вязкоупругость или неоднородность - нередко исключаются из модели. В последние годы наблюдается устойчивый рост интереса к исследованию параметрических колебаний и динамической устойчивости механических конструкций. Существенный вклад в развитие данного направления внесён в работах [3, 6], где рассмотрены основные закономерности возникновения параметрического резонанса и формирования областей динамической неустойчивости.

В данной работе разработана универсальная методика построения трёхмерных областей динамической неустойчивости, позволяющая проводить анализ

параметрических колебаний конструкций при различных граничных и начальных условиях, а также с учётом широкого спектра физических, геометрических и механических характеристик. Универсальность предлагаемого подхода обеспечивает возможность его применения к различным математическим моделям и конструктивным схемам.

### Математическая модель

Пусть к боковым сторонам жестко-зашемленной пластины прикладываются сжимающие усилия, изменяющиеся по времени согласно закону:

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \gamma t \quad (1)$$

Здесь под  $P_0$  и  $P_t$  понимаются амплитуды постоянной и переменной части нагрузки, а  $\gamma$  - частота внешней периодической нагрузки.

Математическая модель задачи, представляющая собой систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных относительно перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  и углов поворота  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  имеет вид [7, 8]:

$$\begin{aligned} & A_{11}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + A_{16}^* \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & + A_{26}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + A_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + B_{11}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + B_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} = I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & A_{12}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + A_{16}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{22}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ & + A_{26}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + A_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & + B_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + B_{22}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + 2B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} A_{11}^* \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial x} A_{11}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} A_{12}^* \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\partial w}{\partial x} A_{12}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} A_{12}^* \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial y} A_{12}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} A_{16}^* \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} A_{16}^* \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{\partial w}{\partial y} A_{16}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} A_{16}^* \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} A_{22}^* \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial w}{\partial y} A_{22}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} A_{26}^* \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} A_{26}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
 & + \frac{\partial w}{\partial y} A_{26}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} A_{26}^* \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{\partial w}{\partial x} A_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} A_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} A_{66}^* \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + A_{44}^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + A_{45}^* \left( 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) + \\
 & + A_{55}^* \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{11}^* \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} B_{11}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{12}^* \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} B_{12}^* \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \\
 & + \frac{\partial w}{\partial x} B_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} B_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} B_{16}^* \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial w}{\partial x} B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \\
 & + \frac{\partial w}{\partial y} B_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B_{16}^* \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} B_{22}^* \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} B_{22}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} B_{26}^* \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{\partial w}{\partial y} B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B_{26}^* \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} B_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B_{66}^* \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial y} B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} B_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + q = I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 & B_{11}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + B_{16}^* \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
 & + B_{26}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + D_{11}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + \\
 & + D_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + 2 D_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} - \\
 & - A_{45}^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) - A_{55}^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \\
 & B_{12}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + B_{16}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{22}^* \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
 & + B_{26}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + B_{66}^* \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\
 & + D_{12}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{16}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + D_{22}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + D_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + 2 D_{26}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + D_{66}^* \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} - \\
 & - A_{44}^* \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \right) - A_{45}^* \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \right) = I_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad w(x, y, 0) = w_0(x, y), \quad \psi_x(x, y, 0) = \psi_{0x}(x, y), \\ \psi_y(x, y, 0) = \psi_{0y}(x, y), \quad \dot{u}(x, y, 0) = \dot{u}_0(x, y), \quad \dot{v}(x, y, 0) = \dot{v}_0(x, y), \quad \dot{w}(x, y, 0) = \dot{w}_0(x, y), \\ \dot{\psi}_x(x, y, 0) = \dot{\psi}_{0x}(x, y), \quad \dot{\psi}_y(x, y, 0) = \dot{\psi}_{0y}(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где вид интегральных операторов  $A_{ij}^* \varphi$ ,  $B_{ij}^* \varphi$  и  $D_{ij}^* \varphi$ , а также  $I_0$  и  $I_2$  приведены в работе [7, 8].

Решение системы уравнений (2), удовлетворяющее граничным условиям задачи будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{mn}(t) X_1(x) Y_1(y), \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{mn}(t) X_2(x) Y_2(y), \\ w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn}(t) X_3(x) Y_3(y), \\ \psi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{xmn}(t) X_4(x) Y_4(y), \\ \psi_y(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \psi_{ymn}(t) X_5(x) Y_5(y), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_{mn}(t)$ ,  $v_{mn}(t)$ ,  $w_{mn}(t)$ ,  $\psi_{xmn}(t)$ ,  $\psi_{ymn}(t)$  - неизвестные функции времени,  $X_i(x)$  и  $Y_j(y)$  - аппроксимирующие функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям.

Подставляя (3) в систему уравнений (2) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина получаем систему нелинейных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений со слабо сингулярными ядрами Колтунова-Ржаницына. Далее, для численной реализации, используется численный метод, основанный на использовании квадратурных формул [9, 10], позволяющий преобразовать сингулярные ядра релаксации в регулярные.

Как отмечалось ранее, одним из ключевых аспектов решения таких типов задач является определение областей динамической неустойчивости конструкции. Т.е. определения таких взаимозависимостей между параметрами  $P_0$ ,  $P_t$  и  $\gamma$  при сочетании которых конструкция теряет устойчивость. Иными словами, необходимо определить область, в которой значения внешней периодической нагрузки не меньше критического значения нагрузки, т.е. выполняется условие:

$$P_0 + P_t \cos \gamma \geq P_{кр} \quad (4)$$

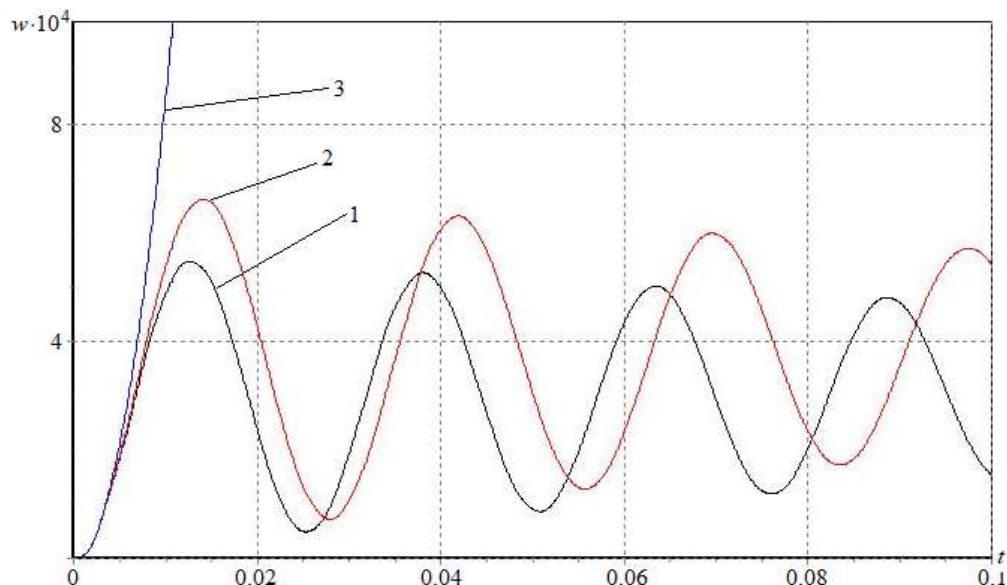
Решение данного уравнения имеет вид:

$$-\arccos \frac{P_{кр} - P_0}{P_t} + 2\pi k \leq \gamma \leq \arccos \frac{P_{кр} - P_0}{P_t} + 2\pi k, k \in Z \quad (5)$$

### Результаты и обсуждение

Одной из препятствий при построении областей динамической неустойчивости является отсутствие явно заданных критических значений нагрузки. Многочисленные численные расчёты показали, что критическую нагрузку можно с достаточной точностью получить, подставляя в выражение (1) значение параметра  $\gamma = 0$ , что

соответствует состоянию чистого статического сжатия без динамического возбуждения. Такое упрощение позволяет получить простую оценку порогового значения критической нагрузки, которая может быть использована в качестве исходной основы для последующего анализа динамической устойчивости. При этом, в качестве критического мы будем принимать такое её численное значение, при котором наблюдается резкий и существенный рост амплитуды прогиба (рис.1).



**Рисунок 1. Изменения прогиба срединной точки анизотропной армированной вязкоупругой пластины при докритической нагрузке (кривые 1 и 2) и посткритической нагрузке (кривая 3)**

Исходя вышеизложенных предположений, в рамках последующих расчетов, на основе анализа широкого диапазона физических, механических и геометрических характеристик композитной пластины, были определены значения критических нагрузок (см. таблицу 1).

Таблица 1. Значения критических нагрузок в зависимости от геометрических и физических параметров вязкоупругой анизотропной армированной пластины

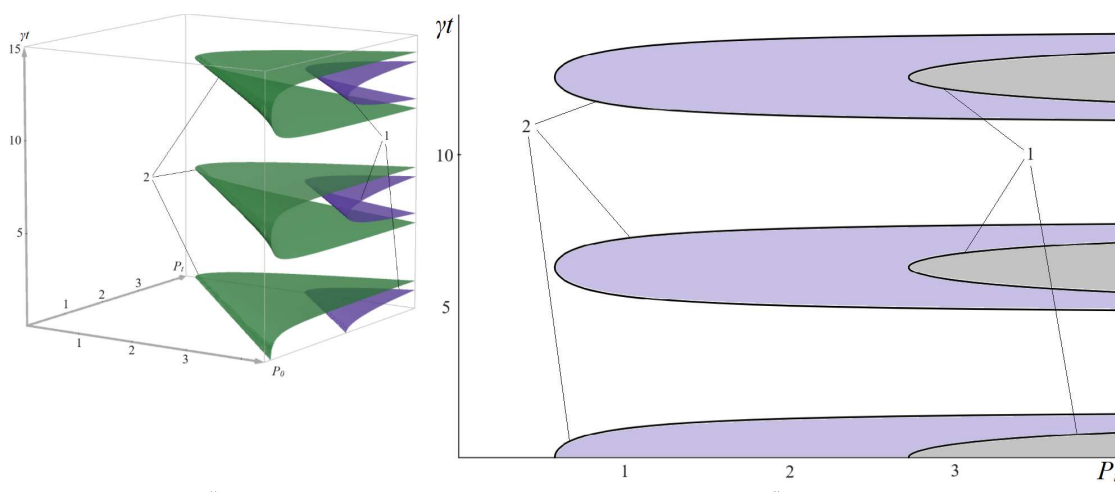
| №  | a, м | b, м | h, см | Число слоев | Ориентация армирующих волокон | Критическая нагрузка, МПа |
|----|------|------|-------|-------------|-------------------------------|---------------------------|
| 1  | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 1           | 45°                           | 14.79                     |
| 2  | 0.6  | 0.5  | 0.5   | 1           | 45°                           | 14.16                     |
| 3  | 0.7  | 0.5  | 0.5   | 1           | 45°                           | 12.90                     |
| 4  | 0.5  | 0.5  | 0.4   | 1           | 45°                           | 9.46                      |
| 5  | 0.5  | 0.5  | 0.3   | 1           | 45°                           | 5.32                      |
| 6  | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 1           | 0°                            | 15.68                     |
| 7  | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 1           | 15°                           | 15.46                     |
| 8  | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 1           | 30°                           | 15.05                     |
| 9  | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 2           | 0°/90°                        | 15.40                     |
| 10 | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 2           | 15°/-15°                      | 15.61                     |
| 11 | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 2           | 30°/-30°                      | 15.42                     |
| 12 | 0.5  | 0.5  | 0.5   | 2           | 45°/-45°                      | 15.21                     |

На основе вычисленных критических нагрузок были построены трёхмерные области динамической неустойчивости в соответствии с выражением (5). Предлагаемая методика позволяет определять области динамической неустойчивости для широкого класса задач независимо от используемой математической модели (линейной или нелинейной, упругой или вязкоупругой), а также от типа граничных и начальных условий.

На рис. 2 представлены результаты численного анализа для упругих и вязкоупругих конструкций. В частности, на рис. 2(b) приведён двумерный срез трёхмерной области динамической неустойчивости, изображённой на рис. 2(a), соответствующий фиксированному значению параметра  $P_0 = 4 \text{ МПа}$ . Такое представление позволяет более детально исследовать влияние остальных параметров на положение границ динамической неустойчивости и характер поведения системы вблизи этих границ.

Анализ полученных результатов показывает, что учёт вязкоупругих свойств материала приводит к заметному уменьшению размеров области динамической неустойчивости и её смещению относительно упругого случая. Данный эффект обусловлен наличием внутренних механизмов диссипации энергии, способствующих снижению интенсивности параметрического возбуждения и повышению динамической устойчивости конструкции.

Сравнение полученных результатов с данными, представленными в опубликованных исследованиях, демонстрирует их качественное и количественное соответствие. Это подтверждает адекватность разработанной математической модели и эффективность предложенного численного подхода к анализу параметрических колебаний и областей динамической неустойчивости конструкций.



**Рисунок 2. Зоны динамической неустойчивости вязкоупругой (1) и упругой (2) анизотропных армированных пластин**

### Заключение

Разработанная математическая модель совместно с предложенной методикой построения областей динамической неустойчивости обеспечивает эффективное решение широкого круга задач, связанных с анализом колебательных характеристик композиционных структур. Данный подход применим как к упругим, так и к вязкоупругим моделям и учитывает различные виды внешних воздействий, а также разнообразные граничные условия. Результаты проведённых расчётов показывают, что полученные зоны неустойчивости хорошо согласуются с ожидаемыми физическими эффектами, что подтверждает корректность и достоверность предложенного метода.

### Список литературы

1. Bolotin, V.V. (1964). The Dynamic Stability of Elastic Systems. Holden Day, San Francisco.
2. Bolotin, V.V. (1963). Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. MacMillan, New York.
3. Fayaz, D., Patel, S. N., Kumar, R., Watts, G. (2024). Nonlinear dynamic instability of laminated composite stiffened plates subjected to in-plane pulsating loading. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(22), 5486–5517. <https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2216692>.
4. Dai, Z., Tang, H., Wu, S., Habibi, M., Moradi, Z., Ali, H.E. (2023). Nonlinear consecutive dynamic instabilities of thermally shocked composite circular plates on the softening elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, 186, 110645. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110645>.
5. Samadani, F. (2025). A semi-analytical methodology for predicting the vibroacoustic response of functionally graded nanoplates under thermal loads. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 53(4), 2452–2486. <https://doi.org/10.1080/15397734.2024.2407419>.
6. Krysko, A.V., Kalutsky, L.A., Zakharova, A.A., Krysko, V.A. (2024). Mathematical modeling of functionally graded porous geometrically nonlinear micro/nano cylindrical panels. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*, 335(3), 216–229. <https://doi.org/10.18799/24131830/2024/3/4505>.
7. Eshmatov, B.Kh., Abdikarimov, R., Amabili, M., Vatin, N. (2023). Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic anisotropic fiber reinforced plates. *Magazine of Civil Engineering*, 118, 11811. <https://doi.org/10.34910/MCE.118.11>.
8. Eshmatov, B.Kh., Mirsaidov, M.M., Abdikarimov, R.A., Vatin, N.I. (2024). Buckling of a viscoelastic anisotropic fiber reinforced plate under rapidly increasing shear load. *Magazine of Civil Engineering*, 117(5). <https://doi.org/10.34910/MCE.129.10>.
9. Badalov, F., Eshmatov, Kh., Yusupov, M. (1987). On certain methods of solving systems of integrodifferential equations encountered in viscoelasticity problems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 51, 683–686. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(87\)90025-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90025-6).
10. Verlan, A.F., Abdikarimov R.A., Eshmatov, Kh. (2010). Numerical modeling of nonlinear problems of the dynamics of viscoelastic systems with variable rigidity. *Electronic Modeling*, 32(2), 3–14.